

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906

УДК 517.927

ДИСКРЕТНАЯ ПРОЦЕДУРА ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

© Р. И. Шевченко¹⁾, Ю. Ф. Долгий²⁾

¹⁾ АО «Опытное конструкторское бюро «Новатор»
620017, Российская Федерация, г. Екатеринбург, пр. Космонавтов, 18
E-mail: oma170@hotmail.com

²⁾ ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского»
Уральского отделения Российской академии наук»
620990, Российская Федерация, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Аннотация. Предлагается процедура оптимальной стабилизации линейных периодических систем дифференциальных уравнений. Стабилизирующие управления, формируемые по принципу обратной связи, определяются состояниями системы в фиксированные моменты времени, предшествующие текущему моменту. Рассматривается эквивалентная линейная периодическая дискретная задача оптимальной стабилизации. Предложена процедура решения дискретного периодического уравнения Риккати. Исследуется связь непрерывной и дискретной периодических задач оптимальной стабилизации. Предложенный метод используется при стабилизации движений механических систем.

Ключевые слова: линейная периодическая система; дискретная задача оптимальной стабилизации; дискретное периодическое уравнение Риккати

Введение

Задача стабилизации, состоящая в обеспечении устойчивости заданных движений механических систем, исследовалась как для моделей конкретных механических систем, так и для целых классов моделей механических систем. В рамках теории стабилизации главные результаты получены для моделей, описываемых линейными дифференциальными уравнениями. В силу теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению эти результаты могут быть применены и к нелинейным моделям при условии, что возмущения стабилизируемого движения малы.

Существуют разные подходы к выбору управления, обеспечивающего устойчивую работу модели на бесконечном интервале времени. Для периодических линейных систем задача стабилизации решается при помощи управлений, формируемых по принципу обратной связи по наблюдаемым состояниям объекта управления в текущие моменты времени. Стабилизирующие управления также зависят явно от времени. Последняя зависимость выбирается периодической, и ее период совпадает с периодом коэффициентов. В рамках методов модального управления стабилизирующие управления выбираются исходя из требований асимптотической устойчивости заданных движений замкнутых систем. Среди методов модального управления часто применяют метод назначения множества мультипликаторов периодической задачи на комплексной плоскости и метод уравнений Ляпунова [1–3]. В инженерных приложениях эти методы позволяют обеспечить заданные запасы устойчивости управляемых систем. Другой подход к выбору стабилизирующей обратной связи основан на введении в постановку задачи стабилизации квадратичного критерия качества регулирования и переходе к задаче оптимальной стабилизации, что позволяет для нахождения управления использовать принцип динамического программирования Беллмана. Доказано, что при выполнении условий стабилизируемости задача оптимальной линейно-квадратичной стабилизации имеет единственное решение в классе линейных периодических обратных связей по текущим состояниям системы [4]. Коэффициенты усиления обратной связи в этом случае определяются периодическим положительно определенным решением дифференциального неавтономного матричного уравнения Риккати. Методы модального управления и методы решения задачи оптимальной стабилизации в применении к общим эволюционным периодическим системам изложены в монографии [1].

Большое количество работ посвящено решению задач стабилизации для конкретных механических систем, в частности – стабилизации неустойчивого верхнего положения равновесия математического маятника. Так, А. Стефенсон [5] и П.Л. Капица заметили, что при малых отклонениях маятника от верхнего положения равновесия вертикальные колебания точки подвеса достаточно большой частоты обеспечивают сравнительно медленные устойчивые незатухающие колебания маятника относительно вертикали. Подобного рода стабилизация получила название динамической стабилизации. Впоследствии П.Л. Капица показал, что динамическая стабилизация перевернутого маятника возможна и при горизонтальных колебаниях его опоры. Отдельного внимания заслуживает задача стабилизации верхнего положения равновесия перевернутого маятника на тележке, когда устойчивость достигается горизонтальными перемещениями тележки. Процедура управления таким маятником исследовалась, например, в работе [6]. Подобная механическая система теряет управляемость, когда маятник занимает горизонтальное положение. В рамках других исследований обеспечивается глобальная устойчивость верхнего положения равновесия маятника. Например, работы [7, 8] посвящены стабилизации маятника на неподвижном основании при помощи маховичного управления. Управление маятником осуществляется вращением маховика, закрепленного на нем. Алгоритм, изложенный в статье [8], основан на линеаризации обратной связью и пассивации. Он позволяет привести маятник в окрестность верхнего положения равновесия из произвольного начального состояния посредством алгоритма

раскачки, после чего происходит переключение на алгоритм стабилизации, обеспечивающий устойчивые автоколебания маятника около верхнего положения равновесия. В работе [9] предложен алгоритм глобальной оптимальной стабилизации обратного маятника с гистерезисными нелинейностями.

В настоящей статье предлагается процедура оптимальной линейно-квадратичной асимптотической стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений. Для стабилизации используются управления по принципу обратной связи, определяемые состояниями системы в фиксированные предыдущие моменты времени. Задержки в управлении позволяют перейти к дискретной задаче оптимальной стабилизации. Дискретные коэффициенты усиления обратной связи определяются при помощи специального алгоритма. Рассмотрены примеры стабилизации механических моделей.

1. Постановка задачи

Рассматривается линейная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad t \in \mathbb{R}^+ = (0, +\infty), \quad (1.1)$$

где x – n -мерный вектор состояния системы, u – m -мерный вектор управления, $A(t), B(t)$ – ω -периодические матричные функции подходящих размерностей. Для уравнения (1.1) требуется сформировать управление по принципу обратной связи такое, что всякое решение $x(t)$ с произвольным начальным условием $x(0) = x_0$ асимптотически устойчиво. При этом необходимо минимизировать показатель качества переходных процессов

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)] dt, \quad (1.2)$$

где $R(t)$ – симметричная положительно определенная ω -периодическая матричная функция размерности $m \times m$, $Q(t)$ – симметричная положительно полуопределенная ω -периодическая матричная функция размерности $n \times n$.

В классической теории оптимальной стабилизации периодических линейных систем дифференциальных уравнений предполагается, что допустимые управления зависят от текущего момента времени t и текущего состояния системы $x = x(t)$. Для периодических систем можно ограничиться периодической зависимостью от текущего момента, а для линейных систем – линейной зависимостью от текущего состояния системы. При таком выборе множества допустимых управлений U матричный коэффициент усиления оптимального стабилизирующего управления определяется с помощью периодического решения неавтономного дифференциального уравнения Риккати. Задача нахождения периодического решения дифференциального матричного нелинейного уравнения Риккати достаточно сложна. Отсутствие задержек при формировании управления по принципу обратной связи значительно усложняет процедуру его технической реализации.

При определении множества допустимых управлений U_d в настоящей работе задержки в управлении определяются специальным образом. Рассматривается периодическое разбиение числовой оси точками $t_j = t_{j+k} - \omega$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \omega$. Допустимые управления зависят от текущего момента времени

t и состояния системы x_j в фиксированный момент времени t_{j_d} , $x_{j_d} = x(t_{j_d})$, где t_{j_d} – ближайшая к текущему моменту t точка выбранного выше разбиения числовой оси. Индекс последней точки зависит от t , то есть $j_d = j_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Функция $j_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является кусочно-постоянной, имеющей разрывы первого рода в точках выбранного разбиения числовой оси, непрерывна справа в точках разрыва. Следовательно, допустимые управления в данной работе моделируются функциями $u(t, x(t_{j_d(t)}))$, $t \in \mathbb{R}$. Мы ограничимся изучением ситуации, когда множество допустимых управлений U_d содержит только управления, зависимость которых от первого аргумента является кусочно-постоянной с разрывами первого рода в точках выбранного разбиения числовой оси, непрерывной справа по первому аргументу в точках разрыва. Тогда имеем $u(t, x(t_{j_d(t)})) = u(t_{j_d(t)}, x(t_{j_d(t)}))$, $t \in \mathbb{R}$.

Будем также полагать, что зависимость допустимых управлений от второго аргумента является непрерывной. Справедливо представление $t_{j_d(t)} = t - \tau_d(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где τ_d – кусочно-непрерывная функция, имеющая разрывы первого рода в точках выбранного разбиения, $\tau_d(t) = t - t_{j_d(t)}$ при $t \in \mathbb{R}$, $\tau_d(t + \omega) = \tau_d(t)$, $0 \leq \tau_d(t) < \max_{i \in \mathbb{Z}} (t_{i+1} - t_j) = r_d \leq \omega$, $t \in \mathbb{R}$. Мы рассматриваем множество допустимых управлений U_d с переменными периодическими задержками. Для его моделирования достаточно использовать периодические последовательности непрерывных функций $u_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $u_{i+k} = u_i$, $i \in \mathbb{Z}$, полагая $u(t_i, x(t_i)) = u_i(x(t_i))$, $i \in \mathbb{Z}$.

В настоящей работе изучается задача оптимальной стабилизации системы (1.1) с показателем качества (1.2) для специального множества допустимых управлений U_d , полное описание которого приведено выше.

2. Дискретная задача стабилизации

Специальные свойства рассматриваемого множества допустимых управлений U_d позволяют перейти от непрерывной задачи оптимальной стабилизации к дискретной задаче оптимальной стабилизации.

Теорема 2.1. *Непрерывная периодическая задача оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с допустимым множеством управлений U_d эквивалентна дискретной задаче оптимальной стабилизации*

$$\hat{x}_{j+1} = \hat{A}_j \hat{x}_j + \hat{B}_j \hat{u}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0 = 0 \cup \mathbb{N}, \quad (2.3)$$

$$J_d = \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\hat{x}_j^T \hat{Q}_j \hat{x}_j + 2\hat{x}_j^T \hat{N}_j \hat{u}_j + \hat{u}_j^T \hat{R}_j \hat{u}_j \right], \quad (2.4)$$

где k -периодические матрицы $\hat{A}_j, \hat{B}_j, \hat{Q}_j, \hat{N}_j, \hat{R}_j$ определяются формулами

$$\hat{A}_j = X(t_{j+1}) X^{-1}(t_j), \quad \hat{B}_j = X(t_{j+1}) \int_{t_j}^{t_{j+1}} X^{-1}(s) B(s) ds,$$

$$\hat{Q}_j = X^{-T}(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} X^T(s) Q(s) X(s) ds X^{-1}(t_j),$$

$$\begin{aligned}\widehat{N}_j &= X^{-T}(t_j) \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[X^T(s_1)Q(s_1)X(s_1) \int_{t_j}^{s_1} X^{-1}(s_2)B(s_2)ds_2 \right] ds_1, \\ \widehat{R}_j &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\int_{t_j}^{s_1} B^T(s_2)X^{-T}(s_2)ds_2 X^T(s_1)Q(s_1)X(s_1) \int_{t_j}^{s_1} X^{-1}(s_2)B(s_2)ds_2 + R(s_1) \right] ds_1.\end{aligned}\quad (2.5)$$

Здесь $X(\cdot)$, $X(0) = I_n$, – фундаментальная нормированная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \in \mathbb{R}$; $X^{-T} = ((X(t))^{-1})^T$, $t \in \mathbb{R}$; \widehat{Q}_j – симметричные положительно полуопределенные матрицы, \widehat{R}_j – симметричные положительно определенные матрицы, $j \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Для введенного выше множества допустимых управлений U_d управляемая система описывается системой дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными аргументами

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u_j(x(t_j)), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (2.6)$$

При заданном начальном условии $x(0) = x_0$ и заданных непрерывных функциях $u_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, задача Коши для системы (2.6) имеет единственное решение $x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$ при $t \geq 0$, определяемое формулами

$$\begin{aligned}x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) &= X(t) [X^{-1}(t_j)x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) \\ &+ \int_{t_j}^t X^{-1}(s)B(s)ds u_j(x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))], \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0,\end{aligned}\quad (2.7)$$

$$x(0, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = x_0.$$

Ему соответствует программное управление $u(t, x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))) = u_j(x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $t_j \leq t < t_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, для системы (1.1).

Для функций $u_j(\cdot)$, $j = \overline{1, k}$, система разностных уравнений

$$\widehat{x}_{j+1} = \widehat{A}_j \widehat{x}_j + \widehat{B}_j u_j(\widehat{x}_j), \quad j \in \mathbb{N}_0,$$

при начальном условии $\widehat{x}_0 = x_0$ имеет единственное решение задачи Коши $\widehat{x}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{x}_0(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = x_0$. Ему отвечает программное управление $\widehat{u}_j = u_j(\widehat{x}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $j \in \mathbb{N}_0$.

При управлениях \widehat{u}_j , $j \in \mathbb{N}_0$, и начальном условии $\widehat{x}_0 = x_0$ система (2.3) имеет единственное решение задачи Коши $\widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$, $\widehat{x}_0(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots) = x_0$, и справедливы равенства $\widehat{x}_j(x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = \widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$.

В силу формулы (2.7) $x(t_j, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)) = \widehat{x}_j(x_0, \widehat{u}_0, \dots, \widehat{u}_j, \dots)$, $j \in \mathbb{N}_0$, и величина показателя качества (1.2) при подстановке $x(t, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot))$, $u(t, x(t_{j_d(t)}, x_0, u_1(\cdot), \dots, u_k(\cdot)))$, $t \geq 0$, совпадает с величиной показателя качества (2.4)

при подстановке $\hat{x}_j(x_0, \hat{u}_0, \dots, \hat{u}_j, \dots)$, \hat{u}_j , $j \in \mathbb{N}_0$. Следовательно, непрерывная задача оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с выбранным множеством допустимых управлений U_d эквивалентна дискретной задаче оптимальной стабилизации (2.3), (2.4). \square

Дискретные задачи оптимальной стабилизации хорошо изучены [4].

Теорема 2.2. [10] *Если дискретная задача (2.3), (2.4) стабилизируема, то ее оптимальное стабилизирующее управление определяется формулами*

$$\hat{u}_j^0 = - \left(\hat{R}_j + \hat{B}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{B}_j \right)^{-1} \left(\hat{B}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{A}_j + \hat{N}_j^T \right) \hat{x}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \quad (2.8)$$

где \hat{P}_j , $j \in \mathbb{N}_0$, – симметричное положительно определенное k -периодическое решение дискретного периодического уравнения Риккати

$$\begin{aligned} \hat{P}_j = & \hat{Q}_j + \hat{A}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{A}_j - \left(\hat{A}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{B}_j + \hat{N}_j \right) \times \\ & \left(\hat{R}_j + \hat{B}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{B}_j \right)^{-1} \left(\hat{A}_j^T \hat{P}_{j+1} \hat{B}_j + \hat{N}_j \right)^T, \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

В настоящей работе дискретная задача оптимальной стабилизации (2.3), (2.4) является вспомогательной. Ее коэффициенты определяются специальными формулами (2.5).

Теорема 2.3. *Если дискретная задача (2.3), (2.4) стабилизируема, то для непрерывной задачи стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d оптимальное стабилизирующее управление существует и определяется формулой*

$$\begin{aligned} u_d^0[t, x_t(\cdot)] = & - \left(\hat{R}_{j_d(t)} + \hat{B}_{j_d(t)}^T \hat{P}_{j_d(t)+1} \hat{B}_{j_d(t)} \right)^{-1} \\ & \times \left(\hat{B}_{j_d(t)}^T \hat{P}_{j_d(t)+1} \hat{A}_{j_d(t)} + \hat{N}_{j_d(t)}^T \right) x_t(-\tau_d(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где $x_t(\vartheta) = x(t + \vartheta)$, $\vartheta \in [-r_d, 0]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Справедливость утверждений следует из теорем 2.1, 2.2. \square

Используемый в работе алгоритм численного решения дискретного периодического уравнения Риккати является модификацией алгоритма, приведенного в статье [11] для случая $\hat{N}_j = 0$, $j \in \mathbb{N}_0$. Для решения дискретного периодического уравнения Риккати используется взаимосвязь между уравнением Риккати и двухточечной краевой задачей, соответствующей задаче оптимального управления (2.3), (2.4). Если дискретная система (2.3) стабилизируема, то оптимальная пара (\hat{x}_j, \hat{u}_j) , $j \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет k -периодической системе разностных уравнений [10]

$$\begin{aligned} \hat{x}_{j+1} = & \hat{A}_j \hat{x}_j + \hat{B}_j \hat{u}_j, \quad \hat{\lambda}_j = \hat{Q}_j \hat{x}_j + \hat{N}_j \hat{u}_j + \hat{A}_j^T \hat{\lambda}_{j+1}, \\ & \hat{N}_j^T \hat{x}_j + \hat{R}_j \hat{u}_j + \hat{B}_j^T \hat{\lambda}_{j+1} = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\hat{\lambda}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, – вектор сопряженных переменных.

Упростим систему разностных уравнений (2.11). Исключая \hat{u}_j из уравнений (2.11), получим систему разностных уравнений

$$\hat{x}_{j+1} + \hat{F}_{j+1}\hat{\lambda}_{j+1} = \tilde{\hat{A}}_j\hat{x}_j, \quad -\tilde{\hat{A}}_j^T\hat{\lambda}_{j+1} = \tilde{\hat{Q}}_j\hat{x}_j - \hat{\lambda}_j, \quad (2.12)$$

где $\hat{F}_j = \hat{B}_j\hat{R}_j^{-1}\hat{B}_j^T$, $\tilde{\hat{A}}_j = \hat{A}_j - \hat{B}_j\hat{R}_j^{-1}\hat{N}_j^T$, $\tilde{\hat{Q}}_j = \hat{Q}_j - \hat{N}_j\hat{R}_j^{-1}\hat{N}_j^T$, $j \in \mathbb{N}_0$.

Вводя обозначения $\hat{z}_j^T = \begin{pmatrix} \hat{x}_j^T & \hat{\lambda}_j^T \end{pmatrix}$, $j \in \mathbb{N}_0$, запишем систему уравнений (2.12) в виде

$$\widehat{M}_j\hat{z}_{j+1} = \widehat{L}_j\hat{z}_j, \quad (2.13)$$

где

$$\widehat{M}_j = \begin{bmatrix} I_n & \hat{F}_j \\ 0 & -\tilde{\hat{A}}_j^T \end{bmatrix}, \quad \widehat{L}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\hat{A}}_j & 0 \\ \tilde{\hat{Q}}_j & -I_n \end{bmatrix}.$$

Матрицы $\tilde{\hat{A}}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, обратимы. Следовательно, обратимы матрицы \widehat{M}_j , $j \in \mathbb{N}_0$, и от разностного уравнения (2.13) можно перейти к уравнению

$$\hat{z}_{j+1} = \widehat{S}_j\hat{z}_j, \quad (2.14)$$

в котором

$$\widehat{S}_j = \widehat{M}_j^{-1}\widehat{L}_j = \begin{bmatrix} \tilde{\hat{A}}_j + \hat{F}_j\tilde{\hat{A}}_j^{-T}\tilde{\hat{Q}}_j & -\hat{F}_j\tilde{\hat{A}}_j^{-T} \\ -\tilde{\hat{A}}_j^{-T}\tilde{\hat{Q}}_j & \tilde{\hat{A}}_j \end{bmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Матричное разностное уравнение (2.14) является однородным k -периодическим уравнением. Для него вводится k -периодическая матрица монодромии в соответствии с формулой

$$\widehat{U}_j = \widehat{S}_{j+k-1}\widehat{S}_{j+k-2} \cdots \widehat{S}_{j+1}\widehat{S}_j, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Требуемое решение дискретного периодического уравнения Риккати определяется устойчивым инвариантным подпространством k -периодической матрицы \widehat{U}_j [11]. Предполагаем, что матрицы \widehat{U}_j , $j \in \mathbb{N}_0$, не имеют собственных значений, лежащих на единичной окружности. Тогда базисная матрица \widehat{V}_j устойчивого инвариантного подпространства матрицы \widehat{U}_j определяется ее собственными векторами, соответствующими собственным значениям, по модулю меньшим единицы. Для стабилизируемой дискретной периодической системы (2.3) \widehat{V}_j допускает представление $\widehat{V}_j^T = \begin{pmatrix} \widehat{V}_{1j}^T & \widehat{V}_{2j}^T \end{pmatrix}$, $j \in \mathbb{N}_0$, и формула $\widehat{P}_j = \widehat{V}_{2j}\widehat{V}_{1j}^{-1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, дает требуемое k -периодическое решение дискретного периодического уравнения Риккати.

3. Связь периодических задач оптимальной стабилизации

Пусть решение непрерывной задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) существует как для множества непрерывных управлений U , так и для множества кусочно-постоянных управлений U_d . Тогда справедливо утверждение

Теорема 3.4. *Оптимальное стабилизирующее управление периодической задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d стремится к оптимальному стабилизирующему управлению периодической задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U , когда диаметр периодического разбиения числовой оси точками $t_j = t_{j+k} - \omega$, $j \in \mathbb{Z}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \omega$, стремится к нулю.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В множестве допустимых управлений U оптимальное управление задачи стабилизации (1.1), (1.2) определяется формулой

$$u^0[t, x] = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $P(t)$ – ω -периодическое положительно определенное симметричное решение дифференциального матричного уравнения Риккати [12]

$$\frac{dP}{dt} + Q(t) + PA(t) + A^T(t)P - PB(t)R^{-1}(t)B^T(t)P = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В множестве допустимых управлений U_d оптимальное управление задачи стабилизации (1.1), (1.2) определяется формулой (2.10). Введем диаметр $d = \max_{0 \leq j \leq k-1} (t_{j+1} - t_j)$ периодического разбиения числовой оси. Исследуем поведение оптимального управления (2.10) при d , стремящемся к нулю. Найдем асимптотические разложения матриц $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j \in \mathbb{N}_0$, по диаметру разбиения d .

Фундаментальная матрица $X(t)$ при $t_j \leq t < t_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}_0$, удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода вида

$$X(t) = X(t_j) + \int_{t_j}^t A(s)X(s)ds, \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.15) имеет единственное решение, которое может быть найдено при помощи метода последовательных приближений. Метод последовательных приближений дает асимптотическое разложение

$$X(t) = X(t_j) + \int_{t_j}^t A(s)X(t_j)ds + O(d^2), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.16)$$

Соответствующее асимптотическое разложение $X^{-1}(t)$ имеет вид

$$X^{-1}(t) = X^{-1}(t_j) - X^{-1}(t_j) \int_{t_j}^t A(s)ds + O(d^2), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.16), (3.17) в формулы, определяющие матрицы $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j$, $j \in \mathbb{N}_0$, находим асимптотические разложения

$$\widehat{A}_j = I_n + \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(s)ds + O(d^2), \quad \widehat{B}_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(s)ds + O(d^2),$$

$$\widehat{Q}_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q(s)ds + O(d^2), \quad \widehat{N}_j = O(d^2), \quad \widehat{R}_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} R(s)ds + O(d^2), \quad j \in \mathbb{N}_0. \quad (3.18)$$

Переходим к нахождению асимптотики для дискретного периодического уравнения Риккати (2.9). Используя асимптотические разложения матриц $\widehat{A}_j, \widehat{B}_j, \widehat{Q}_j, \widehat{N}_j, \widehat{R}_j, j \in \mathbb{N}_0$, имеем

$$\begin{aligned} & \left(\widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j \right) \left(\widehat{R}_j + \widehat{B}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j \right)^{-1} \left(\widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{B}_j + \widehat{N}_j \right)^T \\ &= \left(\widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(s)ds + O(d^2) \right) \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R(s)ds + O(d) \right)^{-1} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d) \right), \\ & \widehat{A}_j^T \widehat{P}_{j+1} \widehat{A}_j = \widehat{P}_{j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + \widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(s)ds + O(d^2), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Учитывая асимптотические разложения (3.18), (3.19), преобразуем дискретное периодическое уравнение Риккати (2.9) к асимптотической форме

$$\begin{aligned} \widehat{P}_j &= \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q(s)ds + \widehat{P}_{j+1} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + \widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(s)ds \\ &+ \widehat{P}_{j+1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(s)ds \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R(s)ds \right)^{-1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d^2), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Разделив обе части последнего уравнения на $t_{j+1} - t_j$, получим следующую асимптотическую форму дискретного периодического уравнения Риккати (2.9)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q(s)ds + \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \left(\widehat{P}_{j+1} - \widehat{P}_j \right) + \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} A^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} \\ &+ \widehat{P}_{j+1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} A(s)ds + \widehat{P}_{j+1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B(s)ds \left(\frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} R(s)ds \right)^{-1} \\ & \quad \times \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} B^T(s)ds \widehat{P}_{j+1} + O(d), \quad j \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Фиксируем $t \in [0, \omega)$, полагаем в (3.20) $j = j_d(t)$ и устремляем d к нулю. Справедливы следующие формулы

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} Q(s) ds \right) = Q(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} A(s) ds \right) = A(t),$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} B(s) ds \right) = B(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} R(s) ds \right) = R(t),$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} \widehat{P}_{j_d(t)} = P(t), \quad \lim_{d \rightarrow 0} \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \left(\widehat{P}_{j_d(t)+1} - \widehat{P}_{j_d(t)} \right) \right) = \frac{dP(t)}{dt}.$$

При этом уравнение (3.20) переходит в дифференциальное матричное уравнение Риккати, соответствующее задаче оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с допустимым множеством управлений U . Для оптимального стабилизирующего управления (2.10) справедлива асимптотическая формула

$$u_d^0[t, x_t(\cdot)] = - \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} R(s) ds + O(d) \right)^{-1} \\ \times \left(\frac{1}{t_{j_d(t)+1} - t_{j_d(t)}} \int_{t_{j_d(t)}}^{t_{j_d(t)+1}} B^T(s) ds \widehat{P}_{j_d(t)+1} + O(d) \right) x_t(-\tau_d(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Устремляя в последней формуле d к нулю и учитывая равенства $\lim_{d \rightarrow 0} r_d = 0$, $\lim_{d \rightarrow 0} \tau_d(t) = 0$, имеем

$$\lim_{d \rightarrow 0} u_d^0[t, x_t(\cdot)] = -R^{-1}(t)B^T(t)P(t)x(t) = u^0[t, x(t)], \quad t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

4. Примеры дискретной стабилизации механических систем

Рассматриваются задачи локальной стабилизации движений конкретных механических систем. Исходные нелинейные математические модели механических систем заменяются линейными в малых окрестностях стабилизируемых движений. Ищутся оптимальные стабилизирующие управления, минимизирующие заданные критерии качества переходных процессов.

4.1. Стабилизация маятника Капицы

Требуется стабилизировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = (9.81 + 3.44\pi^2 \cos 2\pi t)x_1 + u,$$

описывающую движение маятника Капицы около верхнего положения равновесия, с критерием качества

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)] dt.$$

При определении множества допустимых управлений U_d принимается $k = 4$ и

$$t_0 = 0, t_1 = 0.25, t_2 = 0.5, t_3 = 0.75, t_4 = 1.$$

Используя формулы (2.5), вычисляем матрицы $\hat{A}_j, \hat{B}_j, \hat{Q}_j, \hat{N}_j, \hat{R}_j, j = \overline{0, 3}$, эквивалентной дискретной периодической задачи оптимальной стабилизации (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \begin{pmatrix} 0.820 & 0.218 \\ -2.785 & 0.480 \end{pmatrix}, \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0.480 & 0.218 \\ -2.785 & 0.820 \end{pmatrix}, \hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 1.925 & 0.343 \\ 10.406 & 2.374 \end{pmatrix}, \\ \hat{A}_3 &= \begin{pmatrix} 2.374 & 0.343 \\ 10.406 & 1.925 \end{pmatrix}, \hat{B}_0 = \begin{pmatrix} 0.029 \\ 0.200 \end{pmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.244 \end{pmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0.038 \\ 0.365 \end{pmatrix}, \hat{B}_3 = \begin{pmatrix} 0.036 \\ 0.313 \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}_0 &= \begin{pmatrix} 0.593 & -0.092 \\ -0.092 & 0.201 \end{pmatrix}, \hat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1.445 & -0.416 \\ -0.416 & 0.196 \end{pmatrix}, \hat{Q}_2 = \begin{pmatrix} 6.077 & 1.612 \\ 1.612 & 0.517 \end{pmatrix}, \\ \hat{Q}_3 &= \begin{pmatrix} 10.562 & 2.179 \\ 2.179 & 0.501 \end{pmatrix}, \hat{N}_0 = \begin{pmatrix} -0.032 \\ 0.024 \end{pmatrix}, \hat{N}_1 = \begin{pmatrix} -0.075 \\ 0.025 \end{pmatrix}, \hat{N}_2 = \begin{pmatrix} 0.224 \\ 0.063 \end{pmatrix}, \hat{N}_3 = \begin{pmatrix} 0.280 \\ 0.058 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_0 &= 0.256, \hat{R}_1 = 0.256, \hat{R}_2 = 0.260, \hat{R}_3 = 0.259. \end{aligned}$$

Используя изложенный выше алгоритм решения дискретного периодического уравнения Риккати, находим решение уравнения (2.9)

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 &= \begin{pmatrix} 28.133 & -3.286 \\ -3.286 & 0.789 \end{pmatrix}, \hat{P}_1 = \begin{pmatrix} 2.387 & -1.073 \\ -1.073 & 5.223 \end{pmatrix}, \hat{P}_2 = \begin{pmatrix} 264.901 & 53.020 \\ 53.020 & 10.742 \end{pmatrix}, \\ \hat{P}_3 &= \begin{pmatrix} 83.716 & 12.539 \\ 12.539 & 2.090 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Используя формулы (2.8), находим оптимальное стабилизирующее управление задачи (2.3), (2.4)

$$\begin{aligned} \hat{u}_0^0 &= 0.315\hat{x}_1 - 0.318\hat{x}_2, \hat{u}_1^0 = 6.553\hat{x}_1 - 1.811\hat{x}_2, \hat{u}_2^0 = -33.563\hat{x}_1 - 6.860\hat{x}_2, \\ \hat{u}_3^0 &= -33.031\hat{x}_1 - 5.337\hat{x}_2. \end{aligned}$$

Используя теорему 2.3, находим оптимальное стабилизирующее управление для непрерывной задачи оптимальной стабилизации (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d . Применяя методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, находим стабилизированные решения управляемой системы (1.1), отвечающие оптимальному стабилизирующему управлению. Подставляя в обратную связь стабилизирующего управления найденные стабилизированные решения, получим соответствующие программные оптимальные управления.

На рисунке 1 приведены графики компонент стабилизированного решения и программного оптимального управления. Начальные значения стабилизированного решения равны $x_1(0) = 0.1745$, $x_2(0) = 0.0873$. По оси абсцисс откладывается время, по левой оси ординат откладываются значения x_1, x_2 , а по правой оси ординат откладываются значения u .

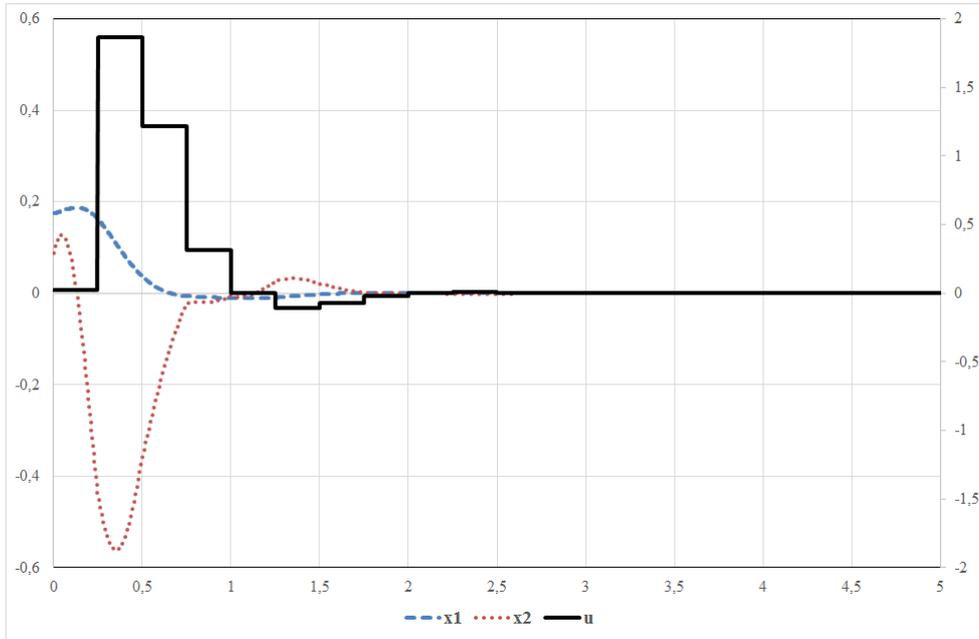


Рис. 1: Стабилизация маятника Капицы

4.2. Стабилизация двухзвенной колебательной цепи

Стабилизируются вертикальные колебания двухзвенной колебательной цепи, которые в линейном приближении описываются системой дифференциальных уравнений [13]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = - \left(1.3 + 0.1 \cos t + \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} \right) x_1 + \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} x_3 + u_1,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4, \quad \frac{dx_4}{dt} = \frac{0.65 + 0.1 \cos t}{1.65 + 0.1 \cos t} (x_1 - x_3) + u_2.$$

Показатель качества переходных процессов имеет вид

$$J = \int_0^{\infty} [x_1^2(t) + x_2^2(t) + x_3^2(t) + x_4^2(t) + u_1^2(t) + u_2^2(t)] dt.$$

При определении множества допустимых управлений U_d принимается $k = 2$ и

$$t_0 = 0, \quad t_1 = \pi, \quad t_2 = 2\pi.$$

Используя формулы (2.5), вычисляем матрицы $\hat{A}_j, \hat{B}_j, \hat{Q}_j, \hat{N}_j, \hat{R}_j, j = 0, 1$, эквивалентной дискретной периодической задачи оптимальной стабилизации

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} -0.472 & -0.476 & 0.091 & 0.649 \\ 1.052 & -0.429 & -0.445 & 0.091 \\ 0.101 & 0.658 & -0.167 & 1.686 \\ -0.436 & 0.104 & -0.408 & -0.090 \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} -0.429 & -0.476 & 0.104 & 0.658 \\ 1.052 & -0.472 & -0.436 & 0.101 \\ 0.091 & 0.649 & -0.090 & 1.686 \\ -0.44 & 0.091 & -0.408 & -0.167 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{B}_0 = \begin{pmatrix} 1.101 & 0.777 \\ -0.358 & 0.624 \\ 0.782 & 3.693 \\ 0.634 & 1.762 \end{pmatrix}, \widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0.978 & 0.811 \\ -0.584 & 0.676 \\ 0.806 & 3.636 \\ 0.671 & 1.615 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{Q}_0 = \begin{pmatrix} 4.308 & -0.073 & -0.671 & 0.342 \\ -0.073 & 2.752 & 0.336 & 1.274 \\ -0.671 & 0.336 & 2.117 & 1.013 \\ 0.342 & 1.274 & 1.013 & 6.896 \end{pmatrix}, \widehat{Q}_1 = \begin{pmatrix} 3.900 & -0.049 & -0.531 & 0.379 \\ -0.049 & 2.991 & 0.392 & 1.222 \\ -0.531 & 0.392 & 2.122 & 1.296 \\ 0.379 & 1.222 & 1.296 & 7.113 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{N}_0 = \begin{pmatrix} -2.607 & 0.621 \\ 1.022 & 2.325 \\ 0.600 & -0.659 \\ 2.305 & 8.610 \end{pmatrix}, \widehat{N}_1 = \begin{pmatrix} -2.496 & 0.631 \\ 1.352 & 2.199 \\ 0.665 & -0.248 \\ 2.219 & 8.721 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{R}_0 = \begin{pmatrix} 6.789 & 3.711 \\ 3.711 & 19.053 \end{pmatrix}, \widehat{R}_1 = \begin{pmatrix} 6.924 & 3.609 \\ 3.609 & 18.853 \end{pmatrix}.$$

Находим симметричное положительно определенное решение дискретного периодического уравнения Риккати (2.9)

$$\widehat{P}_0 = \begin{pmatrix} 6.475 & -1.678 & -1.181 & 1.044 \\ -1.678 & 5.089 & 1.088 & -0.119 \\ -1.181 & 1.088 & 2.661 & 1.836 \\ 1.044 & -0.119 & 1.836 & 4.603 \end{pmatrix}, \widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 4.793 & -0.550 & -0.636 & 0.813 \\ -0.550 & 5.466 & 0.784 & -0.198 \\ -0.636 & 0.784 & 2.654 & 2.161 \\ 0.813 & -0.198 & 2.161 & 4.913 \end{pmatrix}.$$

Используя формулы (2.8), находим оптимальное стабилизирующее управление задачи (2.3), (2.4)

$$\widehat{u}_0^0 = \begin{pmatrix} 0.753\widehat{x}_1 + 0.122\widehat{x}_2 - 0.181\widehat{x}_3 - 0.123\widehat{x}_4 \\ -0.181\widehat{x}_1 - 0.123\widehat{x}_2 + 0.160\widehat{x}_3 - 0.278\widehat{x}_4 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{u}_1^0 = \begin{pmatrix} 0.751\widehat{x}_1 - 0.045\widehat{x}_2 - 0.180\widehat{x}_3 - 0.073\widehat{x}_4 \\ -0.179\widehat{x}_1 - 0.073\widehat{x}_2 + 0.148\widehat{x}_3 - 0.289\widehat{x}_4 \end{pmatrix}.$$

Проведенное компьютерное моделирование показало, что оптимальное стабилизирующее управление непрерывной задачи (1.1), (1.2) с множеством допустимых управлений U_d , найденное в соответствии с теоремой 2.3, обеспечивает асимптотическую устойчивость модели. При этом минимизируется показатель качества переходных процессов (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wang G., Xu Y. Periodic Feedback Stabilization for Linear Periodic Evolution equations. N. Y.: Springer, 2016. 127 p.
2. Aeyels D., Willems J.L. Pole assignment for linear periodic systems by memoryless output feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 1995. Vol. 40. № 4. P. 735-739.
3. Varga A. Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback // IEEE Transactions on Automatic Control. 2000. Vol. 45. № 5. P. 1017-1022.

4. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.: Мир, 1977. 656 с.
5. *Stephenson A.* On induced stability // *Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1908. Vol. 15. № 86. P. 233-236.
6. *Furuta K., Iwase M.* Swing-up time analysis of pendulum // *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*. 2004. Vol. 52. № 3. P. 153-163.
7. *Безнос А.В., Гришин А.А., Ленский А.В., Охоцимский Д.Е., Формальский А.М.* Управление при помощи маховика маятником с неподвижной точкой подвеса // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2004. Вып. 1. С. 27-38.
8. *Spong M.W., Corke P., Lozano R.* Nonlinear control of the reaction wheel pendulum // *Automatica*. 2001. Vol. 37. № 11. P. 1845-1851.
9. *Грачилов Д.В., Лебедев Г.Н., Семенов М.Е., Канищева О.И.* Стабилизация, рассинхронизация и оптимальное управление обратным маятником с гистерезисными свойствами // *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 2013. Вып. 1. С. 29-37.
10. *Varga A.* On solving discrete-time periodic Riccati equations // *IFAC Proceedings Volumes*. 2005. Vol. 38. № 1. P. 254-359.
11. *Bojanczyk A., Golub G.H., Van Dooren P.* The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications // *Proc. SPIE Conference*. 1992. Vol. 1770. P. 31-42.
12. *Егоров А.И.* Уравнения Риккати. М.: Солон-Пресс, 2017. 447 с.
13. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний. М.: Физматлит, 1977. 256 с.

Поступила в редакцию 16 апреля 2018 г.

Прошла рецензирование 23 мая 2018 г.

Принята в печать 26 июня 2018 г.

Конфликт интересов отсутствует.

Шевченко Роман Иванович, АО «Опытное конструкторское бюро «Новатор», г. Екатеринбург, Российская Федерация, инженер-конструктор 3 категории, e-mail: oma170@hotmail.com

Долгий Юрий Филиппович, Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук, г. Екатеринбург, Российская Федерация, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, e-mail: yurii.dolgi@imm.uran.ru

DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906

**DISCRETE PROCEDURE OF OPTIMAL STABILIZATION
FOR PERIODIC LINEAR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS****R. I. Shevchenko¹⁾, Yu. F. Dolgii²⁾**

¹⁾ Experimental Machine Design Bureau «Novator»
18 Kosmonavtov Ave., Yekaterinburg 620017, Russian Federation
E-mail: oma170@hotmail.com

²⁾ N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
16 Sofia Kovalevskaya St., Yekaterinburg 620990, Russian Federation
E-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

Abstract. We propose procedure to solve the optimal stabilization problem for linear periodic systems of differential equations. Stabilizing controls, formed as a feedback, are defined by the system states at the fixed instants of time. Equivalent discrete-time linear periodic problem of optimal stabilization is considered. We propose a special procedure for the solution of discrete periodic Riccati equation. We investigate the relation between continuous-time and discrete-time periodic optimal stabilization problems. The proposed method is used for stabilization of mechanical systems.

Keywords: linear periodic system; discrete-time periodic optimal stabilization problem; discrete periodic Riccati equation

REFERENCES

1. Wang G., Xu Y. *Periodic Feedback Stabilization for Linear Periodic Evolution Equations*. New York, Springer, 2016, 127 p.
2. Aeyels D., Willems J.L. Pole assignment for linear periodic systems by memoryless output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, vol. 40, no. 4, pp. 735-739.
3. Varga A. Robust and minimum norm pole assignment with periodic state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, vol. 45, no. 5, pp. 1017-1022.
4. Kwakernaak H., Sivan R. *Lineynyye optimal'nyye sistemy upravleniya* [Linear Optimal Control Systems]. Moscow, Mir Publ., 1977, 656 p. (In Russian).
5. Stephenson A. On induced stability. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1908, vol. 15, no. 86, pp. 233-236.
6. Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*, 2004, vol. 52, no. 3, pp. 153-163.
7. Beznos A.V., Grishin A.A., Lenskiy A.V., Okhotsimskiy D.E., Formal'skiy A.M. Upravleniye pri pomoshchi makhovika mayatnikom s nepodvizhnoy tochkoj podvesa [A flywheel use-based control for a pendulum with a fixed suspension point]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2004, no. 1, pp. 27-38. (In Russian).
8. Spong M.W., Corke P., Lozano R. Nonlinear control of the reaction wheel pendulum. *Automatica*, 2001, vol. 37, no. 11, pp. 1845-1851.

9. Grachikov D.V., Lebedev G.N., Semenov M.E., Kanishcheva O.I. Stabilizatsiya, rassinkhronizatsiya i optimal'noye upravleniye obratnym mayatnikom s gisterezisnymi svoystvami [Stabilization, mistiming and optimal control of the inverted pendulum with hysteresis properties]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyy analiz i informatsionnyye tekhnologii – Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies*, 2013, no. 1, pp. 29-37. (In Russian).
10. Varga A. On solving discrete-time periodic Riccati equations. *IFAC Proceedings Volumes*, 2005, vol. 38, no. 1, pp. 254-359.
11. Bojanczyk A., Golub G.H., Van Dooren P. The periodic Schur decomposition. Algorithms and applications. *Proc. SPIE Conference*, 1992, vol. 1770, pp. 31-42.
12. Egorov A.I. *Uravneniya Rikkati* [Riccati Equations]. Moscow, Solon-Press, 2017, 447 p.
13. Starzhinskiy V.M. *Prikladnyye metody nelineynykh kolebaniy* [Applied Methods of Nonlinear Oscillations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1977, 256 p. (In Russian).

Received 16 April 2018

Reviewed 23 May 2018

Accepted for press 26 June 2018

There is no conflict of interests.

Shevchenko Roman Ivanovich, Experimental machine design bureau «Novator», Yekaterinburg, the Russian Federation, Design Engineer of 3 Category, e-mail: oma170@hotmail.com

Dolgii Yuri Filippovich, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, the Russian Federation, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Research Associate, e-mail: yurii.dolgii@imm.uran.ru

For citation: Shevchenko R.I., Dolgii Yu.F. Diskretnaya procedura optimal'noj stabilizatsii periodicheskikh lineynykh sistem differentsial'nykh uravneniy [Discrete procedure of optimal stabilization for periodic linear systems of differential equations]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennyye i tekhnicheskie nauki – Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, 2018, vol. 23, no. 124, pp. 891–906. DOI: 10.20310/1810-0198-2018-23-124-891-906 (In Russian, Abstr. in Engl.).